



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 2.02.2019

CLASA a VIII-a



Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.

- Arătați că $\frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})$, unde $n \in \mathbb{N}^*$
 - Aflați $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $1 + \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{1 \cdot 3}}} + \frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{2 \cdot 4}}} + \frac{1}{\sqrt{4+\sqrt{3 \cdot 5}}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{(n-1) \cdot (n+1)}}} =$
 $= \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2020+\sqrt{2018}}} + \frac{1}{\sqrt{2019+\sqrt{2017}}} \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2018-\sqrt{2017}}} - 1 \right)$
- Fie $ABCD A' B' C' D'$ un cub, M și N mijloacele muchiilor AA' , respectiv $C'D'$, iar O și O' centrele fețelor $BCC'B'$, respectiv $ADD'A'$.

 - Demonstrați că $NO' \perp (B'CD')$
 - Determinați sinusul unghiului dintre dreptele MO și NO' .
- Se consideră mulțimea $M = \{a^2 + 2b^2 | a, b \in \mathbb{N}\}$ și n un număr natural. Dacă $100n \in M$, demonstrați că $99n \in M$.
- Fie $VABCD$ o piramidă cu baza $ABCD$ paralelogram. Considerăm punctele P, Q pe diagonala $[BD]$ astfel încât $BQ = DP = \frac{BD}{6}$, M mijlocul muchiei $[VD]$, iar $N \in (VB)$ astfel încât $VN = 3NB$. Demonstrați că:

 - $(MPC) \parallel (AQN)$
 - $RS \parallel (MPC)$, unde R și S sunt mijloacele segmentelor $[AM]$, respectiv $[NC]$.